Gleichungen

1. $3 \cdot x = 12$

2. $5 \cdot x = 40$

3. $3 \cdot x + 11 = 32$

4. $8 \cdot x - 9 = 31$

5. $9 \cdot x - 13 = 23$

6. $5 \cdot (x - 2) = 20$

7. $6 \cdot (x + 5) = 42$

8. $4 \cdot x + 3 \cdot x = 21$

9. $5 \cdot x - 3 \cdot x = 14$

10. $2 \cdot (x + 1) + 3 \cdot (x - 1) = 39$

11. $3 \cdot (x + 2) + 5 \cdot (x - 3) = 23$

12. $9 + 4 \cdot (x - 5) = 17$

13. $4 + 2 \cdot (x + 3) = 20$

14. $12 - (9 - x) = 5$

15. $15 - (x + 2) = 4$

16. $18 - 5 \cdot (x + 2) = 3$

17. $11 - 7 \cdot (x - 2) = 4$

18. $2 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x - 5) = 10$

19. $4 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (x + 1) = 20$

Gleichungen

1. $3 \cdot x = 12$
2. $5 \cdot x = 40$
3. $3 \cdot x + 11 = 32$
4. $8 \cdot x - 9 = 31$
5. $9 \cdot x - 13 = 23$
6. $5 \cdot (x - 2) = 20$
7. $6 \cdot (x + 5) = 42$
8. $4 \cdot x + 3 \cdot x = 21$
9. $5 \cdot x - 3 \cdot x = 14$
10. $2 \cdot (x + 1) + 3 \cdot (x - 1) = 39$
11. $3 \cdot (x + 2) + 5 \cdot (x - 3) = 23$
12. $9 + 4 \cdot (x - 5) = 17$
13. $4 + 2 \cdot (x + 3) = 20$
14. $12 - (9 - x) = 5$
15. $15 - (x + 2) = 4$
16. $18 - 5 \cdot (x + 2) = 3$
17. $11 - 7 \cdot (x - 2) = 4$
18. $2 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x - 5) = 10$
19. $4 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (x + 1) = 20$

1. $x = 4$ *Lösung unmittelbar erkennbar*

$$\begin{array}{rcll} 3 \cdot x & = & 12 & \mid\ :3 \\ x & = & 4 & \end{array}$$

2. $x = 8$
3. $x = 7$ *auf beiden Seiten werden 11 subtrahiert*

$$\begin{array}{rcll} 3 \cdot x + 11 & = & 32 & \mid\ -11 \\ 3 \cdot x & = & 21 & \mid\ :3 \\ x & = & 7 & \end{array}$$

4. $x = 5$
5. $x = 4$
6. $x = 6$ *beachte: die Klammer muß 4 ergeben*

$$\begin{array}{rcll} 5 \cdot (x - 2) & = & 20 & \mid\ :5 \\ x - 2 & = & 4 & \mid\ +2 \\ x & = & 6 & \end{array}$$

7. $x = 2$
8. $x = 3$ *beachte:* $4 \cdot x + 3 \cdot x = (4 + 3) \cdot x = 7 \cdot x$

$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a$

$$\begin{array}{rcll} 4 \cdot x + 3 \cdot x & = & 21 & \\ 7 \cdot x & = & 21 & \mid\ :7 \\ x & = & 3 & \end{array}$$

9. $x = 7$
10. $x = 8$ *beachte:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$\begin{array}{rcll} 2 \cdot (x + 1) + 3 \cdot (x - 1) & = & 39 & \\ 2 \cdot x + 2 + 3 \cdot x - 3 & = & 39 & \\ 5 \cdot x - 1 & = & 39 & \mid\ +1 \\ 5 \cdot x & = & 40 & \mid\ :5 \\ x & = & 8 & \end{array}$$

11. $x = 4$
12. $x = 7$
13. $x = 5$
14. $x = 2$ *beachte:* $a - (b - c) = a - b + c$

$$\begin{array}{rcll} 12 - (9 - x) & = & 5 & \\ 12 - 9 + x & = & 5 & \\ 3 + x & = & 5 & \mid\ -3 \\ x & = & 2 & \end{array}$$

15. $x = 9$
16. $x = 1$ *beachte: es wird* $5 \cdot (x + 2)$ *subtrahiert*

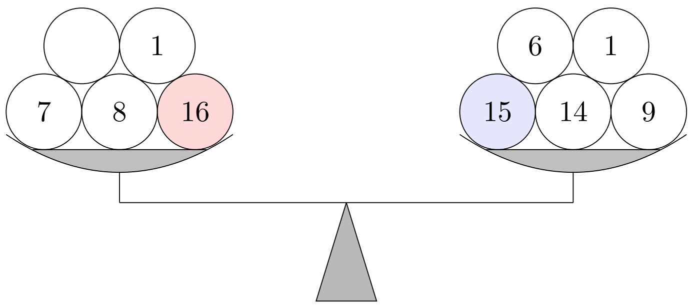
$$\begin{array}{rcll} 18 - 5 \cdot (x + 2) & = & 3 & \\ 18 - (5 \cdot x + 10) & = & 3 & \\ 18 - 5 \cdot x - 10 & = & 3 & \\ 8 - 5 \cdot x & = & 3 & \mid\ -8 \\ -5 \cdot x & = & -5 & \mid\ :(-5) \\ x & = & 1 & \end{array}$$

17. $x = 3$
18. $x = 9$ *Rechnung ist etwas vereinfacht, siehe 16.*

$$\begin{array}{rcll} 2 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x - 5) & = & 10 & \\ 2 \cdot x + 4 - 3 \cdot x + 15 & = & 10 & \\ -x + 19 & = & 10 & \\ -x & = & -9 & \mid\ \cdot(-1) \\ x & = & 9 & \end{array}$$

19. $x = 5$

Entnimm beiden Seiten so viele Kugeln,
bis du das unbekannte Gewicht erkennst.
Jedoch ist zu beachten, dass du nur bis 20 zählen kannst.



Merkblatt für das Lösen von Gleichungen

1. $$8x - 3x = 5 + 15$$

$8x$ steht für $8 \cdot x$. Wenn die Ausdrücke mit x auf einer Seite stehen und die Zahlen auf der anderen, so können wir jede Seite zusammenfassen.
Die Lösung ist dann erkennbar, wenn nicht, teilen wir noch beide Seiten durch 5.

$$\begin{aligned} 8x - 3x &= 5 + 15 \\ 5x &= 20 \qquad |:5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$8x - 3x = 5x$ wird wie $8 \cdot 4 - 3 \cdot 4 = 5 \cdot 4$ zusammengefasst.

2. $$6x - 5 = 4x - 9$$

Hier müssen wir so umstellen, dass Ausdrücke mit x auf einer Seite (wir wählen die linke) stehen und Zahlen auf der anderen.

$$\begin{aligned} 6x - 5 &= 4x - 9 \quad | -4x \\ 2x - 5 &= -9 \qquad | +5 \\ 2x &= -4 \qquad |:2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Rechts steht $4x$, daher ziehen wir von beiden Seiten $4x$ ab.
Links steht -5, daher addieren wir auf beiden Seiten $+5$.

Probe
Hierzu setzen wir $x = -2$ in die Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 6 \cdot (-2) - 5 &= 4 \cdot (-2) - 9 \\ -12 - 5 &= -8 - 9 \\ -17 &= -17 \end{aligned}$$

3. $$\frac{3}{5}x = 9$$

Falls ein Bruch in der Gleichung vorhanden ist, können beide Seiten mit dem Nenner multipliziert werden.

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x &= 9 \quad | \cdot 5 \\ 3x &= 45 \quad |:3 \qquad \text{beachte: } \cancel{5} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} = 3 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Merkblatt für das Lösen von Gleichungen   Fortsetzung

4. $$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10$$

Falls mehrere Brüche in der Gleichung vorhanden sind, können beide Seiten mit dem Hauptnenner multipliziert werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x &= 10 \quad \mid \cdot 6 \\ 3x + 2x &= 60 \qquad \text{beachte:} \quad \cancel{6}^{\,3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}x = 3x \quad \text{und} \quad \cancel{6}^{\,2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}x = 2x \\ 5x &= 60 \quad \mid : 5 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

5. $$8 - (2 + x) = 1$$

Beim Auflösen der Klammern sind die Klammerregeln zu beachten.
Minus vor der Klammer ...

$$\begin{aligned} 8 - (2 + x) &= 1 \\ 8 - 2 - x &= 1 \\ &\dots \\ x &= 5 \end{aligned}$$

6. $$6 - 2(4 - x) = 4$$

Hier kann die Klammer aufgelöst werden.
Minus vor der Klammer ...

$$\begin{aligned} 6 - 2(4 - x) &= 4 \\ 6 - 8 + 2x &= 4 \\ &\dots \\ x &= 3 \end{aligned}$$

7. $$7 - \frac{1}{4}(x - 2) = x$$

Statt die Klammer aufzulösen ist es ratsam, mit dem Nenner zu multiplizieren.

$$\begin{aligned} 7 - \frac{1}{4}(x - 2) &= x \quad \mid \cdot 4 \\ 28 - (x - 2) &= 4x \\ &\dots \\ x &= 6 \end{aligned}$$

1. Auf einem Baum sitzt ein Vogelschwarm. 8 Vögel fliegen weg, $\frac{3}{4}$ der Vögel bleiben übrig. Wie viele Vögel saßen auf dem Baum?

2. Auf einer Stromleitung sitzt ein Vogelschwarm. 9 Vögel fliegen weg, $\frac{2}{5}$ der Vögel bleiben übrig. Wie viele Vögel saßen auf der Stromleitung?

1. Auf einem Baum sitzt ein Vogelschwarm. 8 Vögel fliegen weg,
$\frac{3}{4}$ der Vögel bleiben übrig. Wie viele Vögel saßen auf dem Baum?

Schülerinnen sehen unmittelbar die Lösung: *32 Vögel.*
$\frac{1}{4}$ *fliegen weg, das sind 8 Vögel, ...*
Das Aufstellen der Gleichung $x - 8 = \frac{3}{4}x$
kann überflüssig erscheinen.

2. Auf einer Stromleitung sitzt ein Vogelschwarm. 12 Vögel fliegen weg,
$\frac{2}{5}$ der Vögel bleiben übrig. Wie viele Vögel saßen auf der Stromleitung?

Viele SchülerInnen sehen unmittelbar die Lösung: *20 Vögel.*
$\frac{3}{5}$ fliegen weg, das sind 12 Vögel.
$\frac{1}{5}$ sind dann 4 Vögel, ...
Mit der Gleichung $x - 12 = \frac{2}{5}x$
können alle zur Lösung gelangen.

Anmerkungen zur Didaktik

Anfänglich wird man für die unbekannte Zahl ein Kästchen $\square$ verwenden
und eine Gleichung als Zahlenrätsel auffassen, z. B. $5 \cdot \square + 10 = 50$.
Einheiten können auf zweifache Weise mit unterschiedlicher Semantik hinzugefügt werden.

$$\begin{aligned} 5\,cm \cdot \square + 10\,cm &= 50\,cm \\ 5 \cdot \square_{cm} + 10\,cm &= 50\,cm \end{aligned}$$

Das Problem, eine $50\,cm$ lange Kante mit einem $10\,cm$ langen Stab und einer unbekannten Anzahl $5\,cm$ langer Stäbe auszulegen, führt zur ersten Gleichung.
Der zweiten Gleichung kann die Fragestellung zugrunde liegen, wie lang ein Stab sein muss, damit mit 5 dieser Stäbe und einem $10\,cm$ langen Stab eine $50\,cm$ lange Kante ausgelegt werden kann.

Zur Einführung der Gleichungsumformungen (-vereinfachungen) ist es hilfreich,
sich vor Augen zu führen, dass auf beiden Seiten gleiche Längen vorliegen und dass
die Gleichheit bestehen bleibt.

$$\begin{aligned} 5\,cm \cdot \square + 10\,cm &= 50\,cm \qquad |-10\,cm \\ 5\,cm \cdot \square &= 40\,cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \cdot 15\,cm &= 60\,cm \qquad |: 15\,cm \\ \square &= 4 \end{aligned}$$

In einer Apotheken-Schublade befinden sich 12 Schachteln mit gleich vielen Pillen.
Die Schublade wird durchwühlt. In ihr sind nun 3 leere Schachteln und 24 einzelne Pillen.

$$\begin{aligned} 12 \cdot \square &= 9 \cdot \square + 24 \\ 3 \cdot \square &= 24 \\ \square &= 8 \text{ Pillen je Schachtel, } \quad \text{Probe: } 12 \cdot 8 = 9 \cdot 8 + 24 = 96 \end{aligned}$$

Ein Apotheker füllt Schachteln mit jeweils 9 Pillen.
Am nächsten Tag füllt er dieselbe Anzahl Pillen in Schachteln mit jeweils 6 Stück
und erhält 8 Schachteln mehr als am Tag zuvor.

$$\begin{aligned} x \cdot 9 &= (x + 8) \cdot 6 \\ x \cdot 9 &= x \cdot 6 + 48 \\ x \cdot 3 &= 48 \\ x &= 16 \text{ Schachteln mit jeweils 9 Pillen, } \quad \text{Probe: } 16 \cdot 9 = 24 \cdot 6 = 144 \end{aligned}$$

Die Nützlichkeit von Umformungen ist für SchülerInnen nicht immer ersichtlich,
da sie bevorzugt im Kopf rechnen. Längere Gleichungen wirken meist überzeugend.
Umformungen sollten nur soweit durchgeführt werden, bis die Lösung erkannt wird.

Ferkel-Aufgaben

Auf einem Bauernhof sind 28 Ferkel im Auslauf, die übrigen sind gleichmäßig auf 6 Boxen aufgeteilt. Am Vortag waren 14 im Auslauf und die restlichen Ferkel waren auf 8 Boxen verteilt, wobei die Anzahl an Ferkeln für jede Box stets gleich ist.

$$\begin{aligned} 6 \cdot \square + 28 &= 8 \cdot \square + 14 \\ &\dots \\ \square &= 7 \text{ Ferkel je Box,} \quad \text{Probe: } 6 \cdot 7 + 28 = 8 \cdot 7 + 14 = 70 \end{aligned}$$

Alle Ferkel auf einem Bauernhof sind in Boxen untergebracht, die jeweils 8 Tiere aufnehmen. Würden 28 Ferkel im Auslauf sein und die übrigen Ferkel in Boxen mit jeweils 5 Tieren, so könnten 2 Boxen eingespart werden.

$$\begin{aligned} x \cdot 8 &= (x-2) \cdot 5 + 28 \\ &\dots \\ x &= 6 \text{ Boxen mit jeweils 8 Ferkeln,} \quad \text{Probe: } 6 \cdot 8 = 4 \cdot 5 + 28 = 48 \end{aligned}$$